

### *Esempio 3*

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -2x + 2y + z = 5 \\ 3x - 3y + 9z = 6 \end{cases}$$

**sistema lineare quadrato di ordine 3**  
**(3 equazioni nelle 3 incognite  $x, y, z$ )**



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{matrice incompleta}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{matrice completa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$



$$M = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 18 - 3 + 18 - 18 + 3 - 18 = 0$$



$$r(A) \neq 3$$



$$M' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad r(A) = 2$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$



**teorema di Kronecker**

$$M' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$$



$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \det A = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 45 + 36 + 6 + 45 - 36 = 0$$

**sono gli unici minori orlati di  $M'$**

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$



**tutti i minori orlati del  
terzo ordine sono nulli**

$$r(AN) = 2$$



$$r(A) = r(AN) = r = 2 < n = 3$$



**teorema di Rouchè-Capelli**

**il sistema originario ha  $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$  soluzioni**



$$\begin{cases} -y + 3z = 2 - t \\ 2y + z = 5 + 2t \end{cases}$$

**è il nuovo sistema  $2 \times 2$  ( $m=n$ )**

**(2 equazioni nelle 2 incognite  $y, z$ )**

**avendo posto  $x=t$  come parametro reale:**

**le soluzioni del sistema dipendono da un parametro**

**( $\infty^1$  soluzioni  $\Rightarrow$  **1** parametro);**

**bisogna considerare come parametro proprio**

**l'incognita  $x$  i cui coefficienti non fanno parte**

**del minore non nullo considerato**

$$\begin{cases} -y + 3z = 2 - t \\ 2y + z = 5 + 2t \end{cases}$$



**formule di Cramer**

$$\left( y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \quad \Delta = M' = -7$$



$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 - t & 3 \\ 5 + 2t & 1 \end{vmatrix} = 2 - t - 3(5 + 2t) = 2 - t - 15 - 6t = -13 - 7t$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 - t \\ 2 & 5 + 2t \end{vmatrix} = -5 - 2t - 2(2 - t) = -5 - 2t - 4 + 2t = -9$$

$$\Delta_y = -13 - 7t$$

$$\Delta_z = -9$$

$$\Delta = -7$$



$$\left( y = \frac{-13 - 7t}{-7}, z = \frac{-9}{-7} \right) \quad t \text{ parametro reale}$$

**è la soluzione del sistema ridotto**



$$\left( x = t, y = \frac{13}{7} + t, z = \frac{9}{7} \right) \quad t \text{ parametro reale}$$

**è la soluzione del sistema originario**

# Osservazione!

**Considerando un minore  $M''$  diverso dal precedente,  
si ottengono sempre  $\infty^1$  soluzioni che  
risultano diverse da quelle sopra trovate,  
ma solo apparentemente**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$



$$M'' = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -18 - 3 = -21 \neq 0$$



$$\begin{cases} -2x + z = 5 - 2t \\ 3x + 9z = 6 + 3t \end{cases}$$

**è il nuovo sistema  $2 \times 2$  ( $m=n$ )**

**(2 equazioni nelle 2 incognite  $x, z$ )**

**avendo posto  $y=t$  come parametro reale:**

**in questo caso sono state considerate**

**le ultime due equazioni poiché sono quelle i cui**

**coefficienti fanno parte del minore non nullo considerato**

$$\begin{cases} -2x + z = 5 - 2t \\ 3x + 9z = 6 + 3t \end{cases}$$



**formule di Cramer**

$$\left( x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

$$\Delta = M'' = -21$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 - 2t & 1 \\ 6 + 3t & 9 \end{vmatrix} = 9(5 - 2t) - (6 + 3t) = 45 - 18t - 6 - 3t = 39 - 21t$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 5 - 2t \\ 3 & 6 + 3t \end{vmatrix} = -2(6 + 3t) - 3(5 - 2t) = -12 - 6t - 15 + 6t = -27$$

$$\Delta_x = 39 - 21t$$

$$\Delta_z = -27$$

$$\Delta = -21$$



$$\left( x = \frac{39 - 21t}{-21}, z = \frac{-27}{-21} \right) \quad t \text{ parametro reale}$$

**è la soluzione del sistema ridotto**



$$\left( x = -\frac{13}{7} + t, y = t, z = \frac{9}{7} \right) \quad t \text{ parametro reale}$$

**è la soluzione del sistema originario  
apparentemente differente da quella  
prima determinata**

## Esempio 4

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

**sistema lineare quadrato di ordine 3**  
**(3 equazioni nelle 3 incognite  $x, y, z$ )**



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

*matrice incompleta*

$$AN = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

*matrice completa*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



$$M = \det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = -16 + 36 + 2 - 16 + 6 - 12 = 0$$



$$r(A) \neq 3$$



$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad r(A) = 2$$

$$AN = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & -2 & 5 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



**teorema di Kronecker**

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \det A = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 5 + 40 + 4 - 3 = 56$$

**sono gli unici minori orlati di  $M'$**

$$AN = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



**esiste un minore orlato del  
terzo ordine non nullo**

$$r(AN) = 3$$



$$r(A) = 2 \neq r(AN) = 3$$



**teorema di Rouchè-Capelli**

**il sistema originario non ha soluzioni**

## Esempio 5

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 2 \\ 5x + 4y - 2z + 5w = 1 \\ x + 2y - w = -3 \end{cases}$$

**sistema lineare rettangolare di ordine 3×4**  
**(3 equazioni nelle 4 incognite  $x, y, z, w$ )**



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice incompleta}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{matrice completa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



**teorema di Kronecker**

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 4 + 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 30 - 12 - 20 + 5 = 0$$

**sono gli unici minori orlati di  $M'$**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



**tutti i minori orlati del  
terzo ordine sono nulli**

$$r(A) = 2$$

$$AN = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{4} & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$



**teorema di Kronecker**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 1 + 20 - 8 - 4 + 15 = 0 \quad \longrightarrow \quad r(AN) = 2$$

$$r(A) = r(AN) = r = 2 < n = 4$$



**teorema di Rouchè-Capelli**

**il sistema originario ha  $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$  soluzioni**



**le soluzioni del sistema dipendono da due parametri**

**( $\infty^2$  soluzioni  $\Rightarrow$  2 parametri);**

**bisogna considerare come parametri proprio**

**le due incognite  $z, w$  i cui coefficienti non fanno parte**

**del minore non nullo considerato**



$$\begin{cases} 2x + y = 2 + t - 3s \\ 5x + 4y = 1 + 2t - 5s \end{cases}$$

è il nuovo sistema  $2 \times 2$  ( $m=n$ )

(2 equazioni nelle 2 incognite  $x, y$ )

avendo posto  $z=t$  e  $w=s$  come parametri reali



formule di Cramer

$$\left( x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$$

$$\Delta = M' = 3$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2 + t - 3s \\ 5x + 4y = 1 + 2t - 5s \end{cases}$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 + t - 3s & 1 \\ 1 + 2t - 5s & 4 \end{vmatrix} = 4(2 + t - 3s) - (1 + 2t - 5s) = 8 + 4t - 12s - 1 - 2t + 5s = 7 + 2t - 7s$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 + t - 3s \\ 5 & 1 + 2t - 5s \end{vmatrix} = 2(1 + 2t - 5s) - 5(2 + t - 3s) = 2 + 4t - 10s - 10 - 5t + 15s = -8 - t + 5s$$



$$\left( x = \frac{7 + 2t - 7s}{3}, y = \frac{-8 - t + 5s}{3} \right) \quad \mathbf{t, s \text{ parametri reali}}$$

**è la soluzione del sistema ridotto**

$$\left( x = \frac{7 + 2t - 7s}{3}, y = \frac{-8 - t + 5s}{3} \right) \quad t, s \text{ parametri reali}$$

**è la soluzione del sistema ridotto**



$$\left( x = \frac{7 + 2t - 7s}{3}, y = \frac{-8 - t + 5s}{3}, z = t, w = s \right) \quad t, s \text{ parametri reali}$$

**è la soluzione del sistema originario**